

Nullstellen linearer Systeme

1 Grundlegendes

Zu Beginn dieses Kapitels sollen zur Motivation einige wichtige Fakten diskutiert werden.

1. Pole *und* Nullstellen beeinflussen das Übertragungsverhalten von SISO-Systemen: Bei verschwindenden Anfangsbedingungen ($\mathbf{x}_0 = 0$) ergibt sich als Übertragungsfunktion eines SISO-Systems ($A, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d$):

$$G(s) = \mathbf{c}^T (sI - A)^{-1} \mathbf{b} + d = \frac{n(s)}{d(s)} \quad (1)$$

- Den Einfluß der Pole auf das Übertragungsverhalten sieht man z.B. leicht an dem stark unterschiedlichen dynamischen Verhalten von $G(s) = \frac{1}{s}$ (Integrierer) bzw. $G(s) = \frac{1}{s+1}$ (PT_1 -Glieder).
- Daß Nullstellen ebenfalls großen Einfluß auf das Übertragungsverhalten haben, kann man leicht an folgendem Beispiel sehen:

Beispiel 1

$$G(s) = \frac{s+1}{1.01s+1} \approx 1 \quad (2)$$

Das Übertragungsglied wirkt praktisch wie ein reines Proportionalglied mit dem Verstärkungsfaktor 1 und nicht wie ein PT_1 -Glieder.

Es sind auch vollständige Pol-Nullstellen-Kürzungen möglich.

Beispiel 2

$$G(s) = \frac{\frac{1}{b}(s+b)}{s^2+s+1} \quad (3)$$

Stationäre Verstärkung: $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1 \neq f(b)$

Pole: $s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \neq f(b)$

Nullstelle: $s = -b$

Eine Variation des Parameters b , also des Ortes der Nullstelle, beeinflußt weder die stationäre Verstärkung noch die Lage der Pole. Den Einfluß der Lage der Nullstelle auf das Übertragungsverhalten zeigen die Abbildungen 1 und 2. Das dynamische Verhalten hängt offensichtlich stark von der Lage der Nullstellen ab.

2. Pole charakterisieren die interne dynamische Maschinerie des Systems (Eigendynamik).

- Es sei z_i jeweils ein Pol von $G(s)$. Die Eigenbewegung des autonomen Systems ($u(t) = 0$) aufgrund von Anfangsbedingungen $\mathbf{x}_0 \neq 0$ ist eine Linearkombination der Moden (Pole) des Systems.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}^T e^{At} \mathbf{x}_0 = \mathbf{c}^T \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i e^{z_i t} (\mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{x}_0) \quad (4)$$

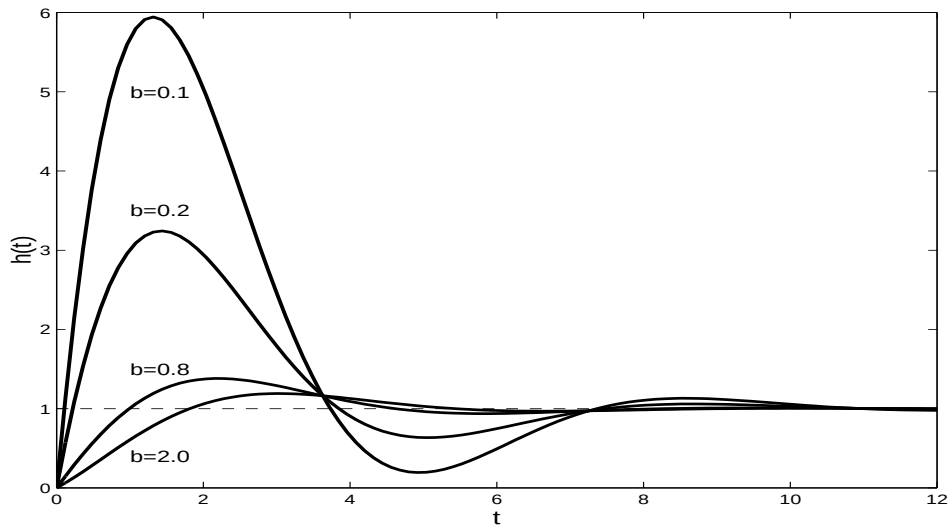


Abbildung 1: Einfluß der Lage der Nullstelle auf die Sprungantwort von $G(s) = \frac{1}{b} \cdot \frac{s+b}{s^2+s+1}$, b positiv (minimalphasig).

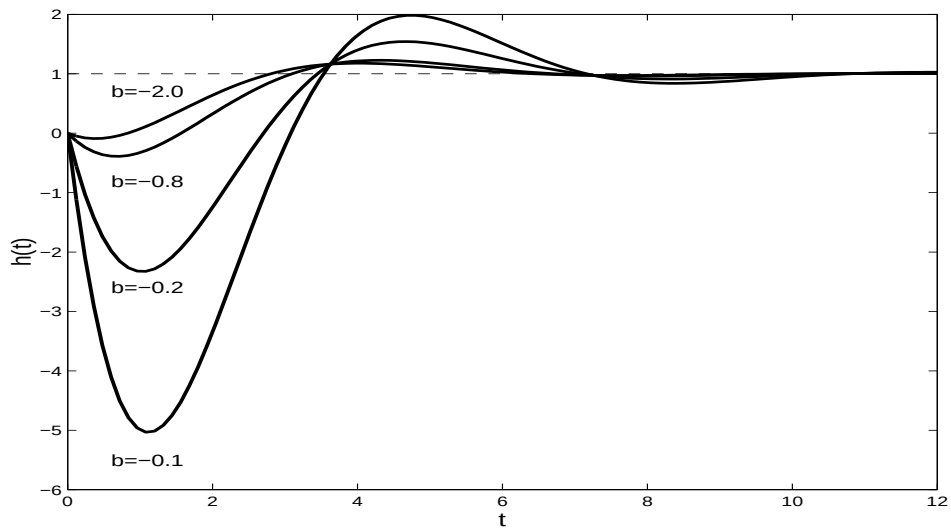


Abbildung 2: Einfluß der Lage der Nullstelle auf die Sprungantwort von $G(s) = \frac{1}{b} \cdot \frac{s+b}{s^2+s+1}$, b negativ (nichtminimalphasig).

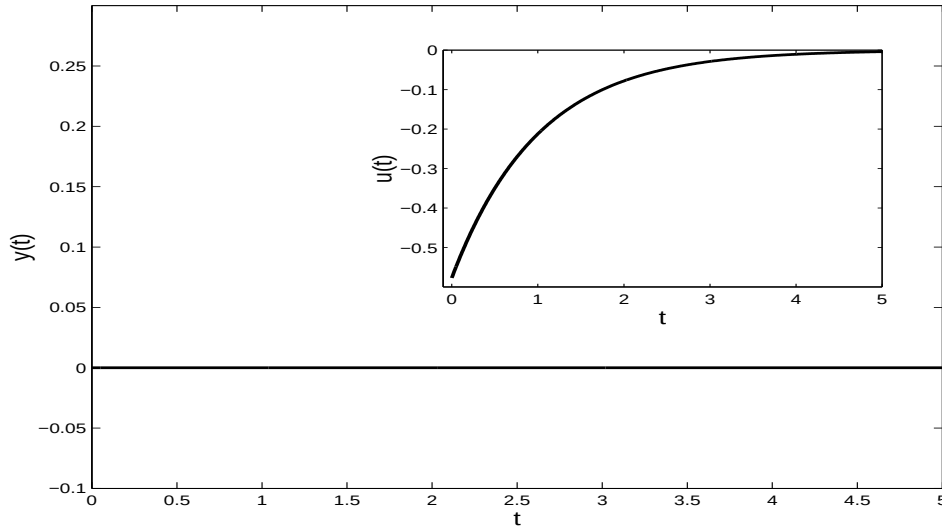


Abbildung 3: Zeitverlauf des Ausgangssignals von $G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$ bei Anregung mit dem Eingang $u(t) = -0.577 \cdot e^{-t}$ und den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = [-0.577 \quad 0.577]^T$. Kleines Bild: Zeitverlauf der Eingangsfunktion.

Dabei sind die $\mathbf{v}_i$ die Rechtseigenvektoren und $\mathbf{w}_i^T$ die Linkseigenvektoren des Systems.

- Prinzip der Resonanz:

Sei $z = \sigma \pm j\omega$ ein Polpaar von $G(s)$.

Wenn man als Eingang $u(t) = h(t) \sin(\omega t)$ wählt, dann kann der Ausgang $|y(t)|$ unter Umständen sehr groß werden (Anregen der Eigenfrequenz).

3. Nullstellen charakterisieren, wie diese interne Maschinerie an die Außenwelt angekoppelt ist.

Beispiel 3

Wir betrachten das Eingrößensystem

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} \quad (5)$$

beziehungsweise dessen Zustandsdarstellung in Regelungsnormalform. Das System hat zwei Pole bei $s_1 = 0$ und $s_2 = -2$ und eine Nullstelle bei $s_z = -1$.

- (a) Abbildung 3 zeigt den Verlauf des Ausgangs von System (5) auf eine Anregung des Systems mit der Frequenz der Nullstelle ($s = -1$):

$$u(t) = -0.577e^{-t} \quad (6)$$

am Eingang und mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -0.577 \\ 0.577 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Durch die Wahl dieser speziellen Anfangsbedingung, in Verbindung mit Eingangssignal (8), bleibt der Ausgang trotz nicht verschwindendem Eingangssignal, konstant gleich null. In Abbildung 4 ist der Verlauf der Zustände von Gleichung (5) dargestellt. Im „Innern“ des Systems ist dynamische Bewegung zu beobachten, die allerdings so geartet ist, daß sie keinen Einfluß auf den Ausgang hat.

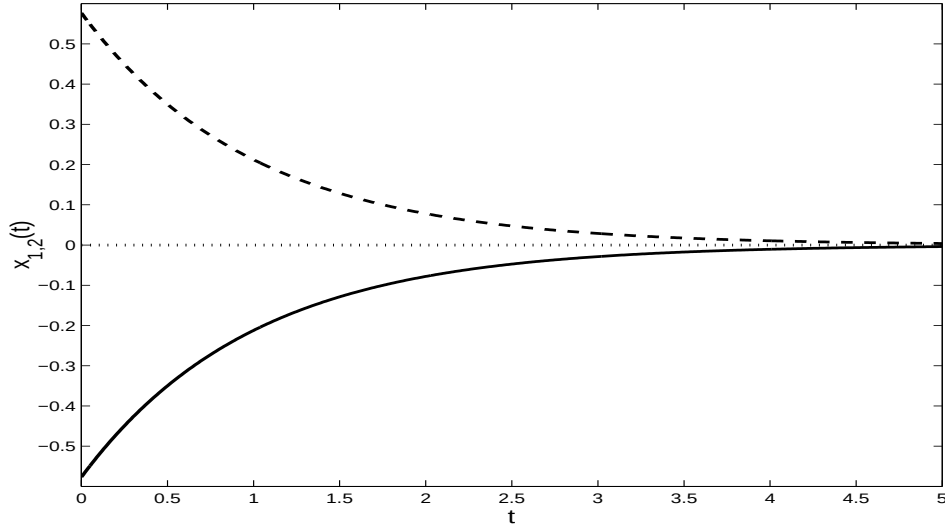


Abbildung 4: Zeitverlauf der Zustände x_1 und x_2 des Systems (5) in Regulationsnormalform bei Anregung mit dem Eingang $u(t) = -0.577 \cdot e^{-t}$ und den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = [-0.577 \ 0.577]^T$.

(b) Das System wird wieder mit der Nullstellenfrequenz angeregt:

$$u(t) = -0.577 \cdot e^{-t} \quad (8)$$

wobei als Anfangsbedingung diesmal

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \quad (9)$$

gewählt wird. Abbildung 5 zeigt den Verlauf des Ausgangs von System (5) auf Anregung (8) und Anfangsbedingung (9). Trotz Anregung mit der Nullstellenfrequenz ist der Ausgang nicht identisch gleich null. Man beachte, daß das Antiresonanzprinzip spezielle Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}_k$ fordert.

Im Frequenzbereich kann man sich das Antiresonanzverhalten folgendermaßen plausibilisieren: Mit dem laplacetransformierten Eingangssignal $U(s)$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = \frac{1}{s+1} \quad (10)$$

ergibt sich für den laplacetransformierten Ausgang $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{(s+1)}{s(s+2)} \cdot \frac{1}{(s+1)} = \frac{1}{s(s+2)} \quad (11)$$

Die Nullstelle wird also durch das Eingangssignal „gekürzt“. Der Ausgang $y(t)$ im Zeitbereich

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \neq f(e^{-t}) \quad (12)$$

ist keine Funktion der Anregungsfrequenz e^{-t} . Die Eingangsfrequenz $s = -1$ wird also vom System „geschluckt“. Bei dieser Plausibilisierung haben wir angenommen, daß die Anfangsbedingungen gleich null sind. Deshalb ist das Ausgangssignal (12) nicht identisch gleich null.

Das Antiresonanzprinzip gilt auch für nichtminimalphasige Systeme. In diesem Fall ist das Anregungssignal sogar instabil.

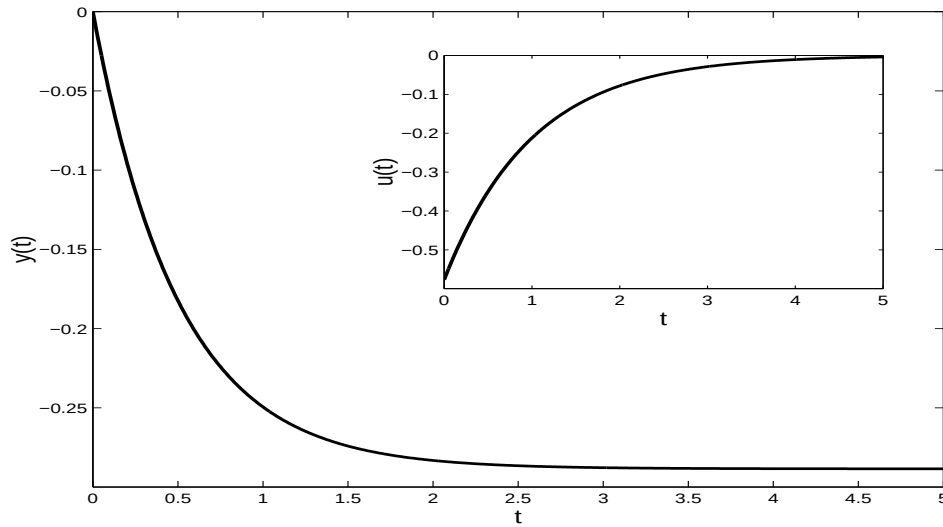


Abbildung 5: Zeitverlauf des Ausgangssignales von $G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$ bei Anregung mit dem Eingang $u(t) = -0.577 \cdot e^{-t}$ und den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = [0 \ 0]^T$. Kleines Bild: Verlauf der Eingangsfunktion.

Beispiel 4

$$G(s) = \frac{s-1}{s(s+2)} \quad (13)$$

Pole: $s_1 = 0$, $s_2 = -2$, Nullstelle: $s = +1$

Wenn das System mit der Frequenz der Nullstelle angeregt wird

$$u(t) = e^{+t} \quad (14)$$

und die Anfangsbedingung zu

$$\mathbf{x}(0) = [0.3 \ 0.3]^T \quad (15)$$

gewählt wird, ist am Ausgang trotz der exponentiell wachsenden Anregungsfunktion keine dynamische Bewegung zu erkennen (Abbildung 6). Allerdings klingt die Dynamik im Innern exponentiell auf (Abbildung 7).

In Kapitel 2 wird die Berechnung der für die Antiresonanzfrequenz zu wählenden Anfangsbedingungen erläutert.

4. Berechnung von Polen und Nullstellen:

Wenn das System als Übertragungsfunktion $G(s)$ gegeben ist, sind die Pole die Wurzeln des Nennerpolynoms und die Nullstellen die Wurzeln des Zählerpolynoms. Wenn das System in Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{0} \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (16)$$

gegeben ist, entsprechen die Pole den Eigenwerten der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$. Die Übertragungsfunktion berechnet sich aus (16) zu

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{n(s)}{d(s)} \quad (17)$$

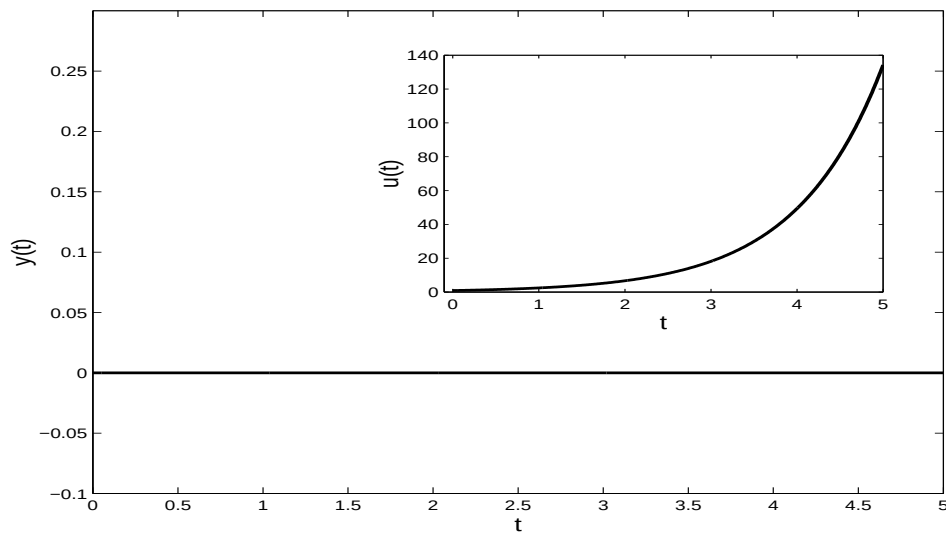


Abbildung 6: Zeitverlauf des Ausgangssignals von $G(s) = \frac{s-1}{s(s+2)}$ bei Anregung mit dem Eingang $u(t) = 0.9045 \cdot e^t$ und den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = [0.3015 \ 0.3015]^T$. Kleines Bild: Zeitverlauf des Eingangssignals.

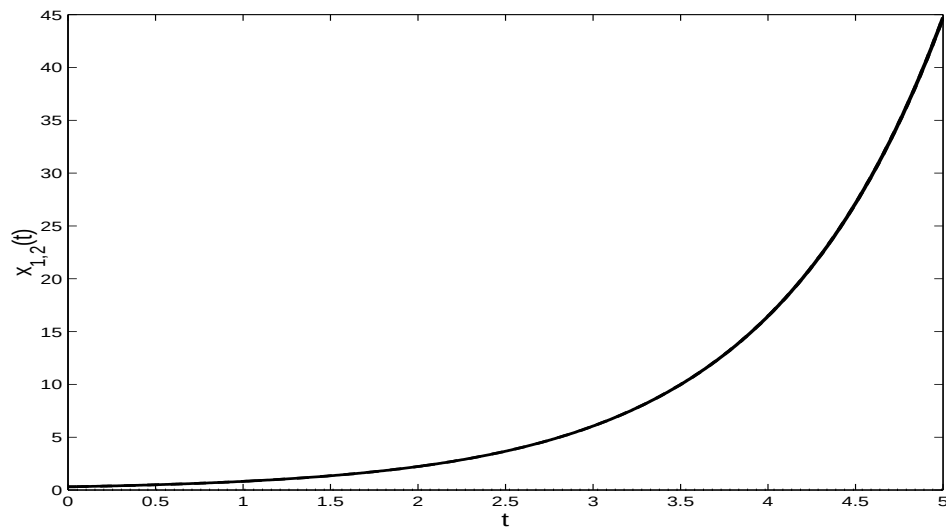


Abbildung 7: Zeitverlauf der Zustände von $G(s) = \frac{s-1}{s(s+2)}$ bei Anregung mit dem Eingang $u(t) = 0.9045 \cdot e^t$ und den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = [0.3015 \ 0.3015]^T$.

Mit

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \cdot Q(s) \quad (18)$$

wobei die Matrix $Q(s)$ die Adjunkten jedes Elementes von $(sI - A)$ enthält, ergibt sich

$$G(s) = \frac{c^T Q(s) b}{\det(sI - A)} \quad (19)$$

Die Wurzeln des Nennerpolynoms, also die Pole des Systems, entsprechen den Eigenwerten der Dynamikmatrix A . Zur Berechnung der Nullstellen muß die Polynommatrix $Q(s)$ berechnet werden. Die Nullstellen hängen nach Gleichung (19) nicht nur von der Dynamikmatrix A ab, sondern auch von den Eingangs- bzw. Ausgangsvektoren b bzw. c^T .

Zusammenfassung:

Bedeutung der Pole:

- Pole = Eigenwerte von A ($\neq f(b, c)$)
- Bestimmen die Eigendynamik des Systems
- Beeinflussen das Ein-/Ausgangs-Verhalten des Systems
- Die Stabilität des Systems hängt nur von der Lage der Pole ab
- Pole können durch Rückführung (feedback) verschoben werden

Bedeutung der Nullstellen:

- Nullstellen = Wurzeln von $c^T Q(s) b = f(A, b, c)$
- Beeinflussen das Ein-/Ausgangs-Verhalten des Systems
- Beeinflussen die Form des Bode-Diagramms (wichtig für Anforderungen an den geschlossenen Kreis)
- Die Stabilität des *geregelten* Kreises hängt auch von den Nullstellen ab
- Durch Rückführung *nicht* beeinflussbar (invariant)

2 Berechnung von Nullstellen im Zustandsraum

In diesem Kapitel geben wir eine systemtheoretische Definition von Nullstellen, die später auch auf den Fall nichtlinearer Systeme verallgemeinert werden kann. Weiterhin führt diese Definition direkt zu einer Berechnungsformel für Nullstellen im Zustandsraum. Die Betrachtungen werden direkt für den Mehrgrößenfall behandelt.

Definition 1

Das E/A -System $\{A, B, C, D\}$ (Minimalrealisierung) mit $y(t) \in \mathcal{R}^p, u(t) \in \mathcal{R}^q$ und $x(t) \in \mathcal{R}^n$ hat eine **Nullstelle** bei z_k , wenn Anfangsbedingungen $x(0) = \xi_k$ und ein Eingangsvektor u_k existieren (nicht beide identisch null), so daß für $t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu_k e^{z_k t} & x_0 &= \xi_k \\ y &= Cx + Du_k e^{z_k t} \\ \text{und} \quad y(t) &= 0 \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Diese Definition ist also eine Verallgemeinerung des oben behandelten Antiresonanzkonzeptes.

Damit, wie in (20) gefordert $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \forall t \geq 0$ gilt, muß

$$C\mathbf{x} + D\mathbf{u}_k e^{z_k t} = 0 \quad \forall t \geq 0$$

erfüllt sein. Dies ist nur dann der Fall, wenn $\mathbf{x}(t)$ die Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p} e^{z_k t} \quad (21)$$

hat. Wegen $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\xi}_k$ folgt daraus sofort $\mathbf{p} = \boldsymbol{\xi}_k$. Um Bedingungen für die Existenz von Nullstellen zu erhalten, wird (21) in die beiden ersten Gleichungen von (20) eingesetzt. Daraus folgt sofort:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_k z_k e^{z_k t} &= A\boldsymbol{\xi}_k e^{z_k t} + B\mathbf{u}_k e^{z_k t} \\ \mathbf{0} &= C\boldsymbol{\xi}_k e^{z_k t} + D\mathbf{u}_k e^{z_k t} \end{aligned} \quad (22)$$

In beiden Gleichungen kann man jeweils durch den Faktor $e^{z_k t}$ dividieren und erhält damit in Matrizenschreibweise

$$\left[\begin{array}{c|c} z_k I - A & -B \\ \hline -C & -D \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\xi}_k \\ \mathbf{u}_k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (23)$$

Dabei wurde die zweite Gleichung noch mit -1 durchmultipliziert. Gleichung (23) stellt ein verallgemeinertes Eigenwertproblem zur Bestimmung der Übertragungsnullstellen dar (siehe auch Einschub lineare Algebra).

Zur Berechnung der Nullstellen brauchen wir somit das Konzept der verallgemeinerten Eigenvektoren.

Einschub: Lineare Algebra

a) Gewöhnliches Eigenwert-Problem (L sei eine $(m \times m)$ -Matrix):

$$L\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad (24)$$

$$\mathbf{w}_i^T L = \lambda_i \mathbf{w}_i^T \quad . \quad (25)$$

Dabei heißen die Skalare λ_i Eigenwerte von L , $\mathbf{v}_i$ sind die Rechtseigenvektoren und $\mathbf{w}_i^T$ die Linkseigenvektoren. Die Eigenwerte sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\det(\lambda I - L) = 0$. Ihre Anzahl entspricht der Dimension m von L .

b) Verallgemeinertes Eigenwert-Problem (L und M seien $(m \times m)$ -Matrizen):

$$L\mathbf{s}_i = \mu_i M\mathbf{s}_i \rightsquigarrow (\mu_i M - L)\mathbf{s}_i = \mathbf{0} \quad (26)$$

$$\mathbf{t}_i^T L = \mu_i \mathbf{t}_i^T M \rightsquigarrow \mathbf{t}_i^T (\mu_i M - L) = \mathbf{0}^T \quad . \quad (27)$$

Die Werte μ_i heißen *verallgemeinerte Eigenwerte* von (L, M) , $\mathbf{s}_i$ sind die *verallgemeinerten Rechtseigenvektoren* und $\mathbf{t}_i^T$ sind die *verallgemeinerten Linkseigenvektoren* von (L, M) .

Die verallgemeinerten Eigenwerte sind die Wurzeln von $\det(\mu M - L) = 0$. Falls M^{-1} existiert, M also regulär ist ($\det M \neq 0$), gibt es m verallgemeinerte Eigenwerte, die den gewöhnlichen Eigenwerten der Matrix $M^{-1}L$ entsprechen. Ist M singulär, d.h. $\det M = 0$, so existiert M^{-1} nicht. Die Anzahl der verallgemeinerten Eigenwerte entspricht dann der Ordnung des Polynoms $\det(\mu M - L)$. Aus den Eigenschaften von Determinanten (Entwicklungssatz, lineare Abhängigkeit) folgt, dass die Ordnung dieses Polynoms nicht größer als der Rang von M sein kann:

$0 \leq \text{Anzahl der verallgemeinerten Eigenwerte} \leq \text{rank}(M)$.

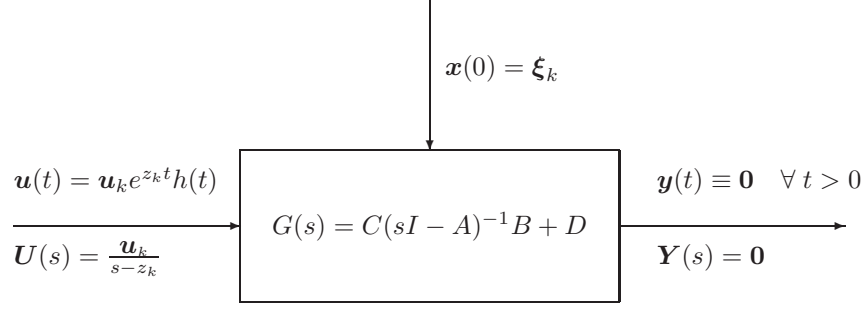


Abbildung 8: Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen Antiresonanz und verallgemeinertem Eigenwertproblem (29).

Berechnung von Nullstellen im Zustandsraum

Es wird der Sonderfall $p = q$ (quadratisches System) betrachtet. Aus der obigen Herleitung ergibt sich der folgende Satz:

Satz 1

Die Nullstellen des quadratischen E/A-Systems $\{A, B, C, D\}$ mit der $n \times n$ Dynamikmatrix A sind die verallgemeinerten Eigenwerte des Matrizenpaars

$$(L, M) = \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (28)$$

d.h. die Lösungen z_k der Gleichung

$$\left[\begin{array}{c|c} z_k I - A & -B \\ \hline -C & -D \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \xi_k \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Wegen $\text{rank}(M) = n$ gibt es höchstens n Nullstellen.

Beweis: siehe Herleitung oben.

Veranschaulichung:

Beispiel 5

Für das Eingrößensystem

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} \quad (30)$$

mit (minimaler) Zustandsdarstellung

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c^T = [1 \quad 1] \quad d = 0 \quad (31)$$

sollen die Nullstellen berechnet werden. Das verallgemeinerte Eigenwertproblem von (31) lautet

$$\left[\begin{array}{cc|c} z_k + 2 & 0 & -1 \\ -1 & z_k & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Die verallgemeinerten Eigenwerte sind die Nullstellen von

$$\det \left[\begin{array}{cc|c} z_k + 2 & 0 & -1 \\ -1 & z_k & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 \end{array} \right] = 0 \quad (33)$$

Entwickeln nach der dritten Spalte liefert

$$-\det \begin{bmatrix} -1 & z_k \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -z_k - 1 = 0 \quad . \quad (34)$$

Die Nullstelle der minimalen Zustandsraumdarstellung (31) ist also

$$z_k = -1 \quad . \quad (35)$$

Die Nullstelle stimmt natürlich mit der direkt aus (30) ablesbaren Nullstellen überein. Für den verallgemeinerten Eigenvektor zu $z_k = -1$ folgt aus

$$\begin{aligned} \xi_1 - u_k &= 0 \\ -\xi_1 - \xi_2 &= 0 \\ -\xi_1 - \xi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

der Wert

$$\begin{aligned} \xi_k &= K_1 [1 \quad -1]^T \\ u_k &= K_1 \quad . \end{aligned} \quad (37)$$

Nullstellen von Mehrgrößensystemen können nicht mehr einfach aus der Übertragungsmatrix abgelesen werden. Obiges Vorgehen kann jedoch direkt für Mehrgrößensysteme angewendet werden.

Zusammenhang zwischen den Nullstellen und $G(s)$

Wir sind seither noch den Beweis schuldig geblieben, daß die oben definierten Nullstellen auch den Wurzeln des Zählerpolynoms von $G(s)$ entsprechen. Dabei beschränken wir uns auf den Spezialfall, daß $G(s)$ ein Eingrößensystem ist und keine Pole und Nullstellen den gleichen Wert annehmen. Wir bauen auf einem Resultat aus der linearen Algebra auf.

Einschub: Berechnung von Block-Determinanten:

Satz 2

(Schur-Formel):

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B) \quad (38)$$

Beweis:

$$\underbrace{\det \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}}_{=1} \cdot \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & B \\ \underbrace{-CA^{-1}A + C}_{=0} & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\rightsquigarrow \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B) \quad (40)$$

□

Aus der Definition der Nullstellen von SISO-Systemen

$$\det \begin{bmatrix} z_k I - A & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{c}^T & -d \end{bmatrix} = 0 \quad (41)$$

ergibt sich mit der Schur-Formel:

$$0 = \det(z_k I - A) \cdot \underbrace{(d + \mathbf{c}^T (z_k I - A)^{-1} \mathbf{b})}_{G(z_k)} (-1) \quad . \quad (42)$$

Der erste Term ist dabei ungleich null, da laut Annahme Pole und Nullstellen ungleiche Werte annehmen. Der zweite Term in (42) entspricht der Determinante der an der Stelle $s = z_k$ evaluierten Übertragungsmatrix. Damit ergibt sich als Charakterisierung der Nullstellen

$$G(z_k) = 0 \quad . \quad (43)$$